Radosław Cioć

Niejednoznaczność zapisu dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova

JEL: L97 DOI: 10.24136/atest.2019.031
Data zgłoszenia: 15.12.2018 Data akceptacji: 08.02.2019

W artykule omówiony został problem wynikający z zapisu pochodno-całki niecałkowitych rzędów Grünwalda-Letnikova, w którym to zapis ten może być niejednoznacznie intepretowany jako pochodna wyższych lub niższych rzędów. Biorąc to pod uwagę autor proponuje nowy zapis uwzględniający ten problem.

Słowa kluczowe: pochodno-całka, Grünwald-Letnikov.

Wstęp

Z definicji pochodnej rzędu *n* [1]:

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f(t-mdt)}{dt^n} \tag{1}$$

poprzez zapis symbolu Newtona za pomocą funkcji Gamma i zamianę rzędu naturalnego na rząd $\eta \in R^+$:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{m!\Gamma(n-m+1)} = \frac{\Gamma(\eta+1)}{m!\Gamma(\eta-m+1)} \tag{2}$$

otrzymuje się bezpośrednio dodatnią pochodno-całkę Grünwalda-Letnikova (G-L) [2-7]:

$$\frac{d^\eta}{dt^\eta} f(t) = D^{(\eta)}(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{\sum_{m=0}^{p} \frac{\Gamma(\eta+1)}{m!\Gamma(\eta-m+1)} f(t-mdt)}{dt^\eta} \tag{3}$$

gdzie:

$$p = \left\lfloor \frac{t_0 - t_1}{dt} \right\rfloor .$$

O ile rachunek różniczkowy wymyślony przez Newtona i Leibniza powstał z konieczności matematycznego zapisu zjawisk fizycznych o tyle pochodno-całka Grünwalda-Letnikova jest matematyczną wariacja tegoż rachunku, która w zastosowaniach miała również nawiązywać do opisu tychże zjawisk i uwzględniać pewne zjawiska, szczególnie nieliniowe, które upraszcza „klasyczny" rachunek różniczkowy. Parametrem, w którym byłyby zapisane te zjawiska jest niecałkowity rząd. Problemem, do dzisiaj, jest jednak niejednoznaczna i ogólna interpretacja, jakie zjawiska mogą być ujęte w zapisie rzędu i czy są w związku z tym ograniczenia związane z wartością rzędu tak, aby cały zapis miał fizyczny sens [2,8,9].

W definicji dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova (3), wartość rzeczywistego rzędu η ograniczona jest do dodatnich wartości. W definicji brak jednak dodatkowych założeń pozwalających na próbę fizycznej interpretację takiej pochodnej. Inaczej niż w definicji pochodnej całkowitego rzędu (1), gdzie rząd pochodnej identyfikowany jest jednoznacznie z liczbą iteracji *n* przyrostu zmiennej niezależnej *dt*, a liczba iteracji z rzędem. W definicji dodatniej pochodno-całki (3) liczba iteracji *p* nie jest bezpośrednio związana z niecałkowitym rzędem η. W przypadku więc, gdy rząd niecałkowity przyjmuje całkowitą wartość $\eta = 1$ (jest to szczególny przypadek takiej pochodnej przy przyjęciu założenia, że rachunek ułamkowy pochodnych jest uogólnieniem rachunku pochodnych z definicji Leibniza), nie oznacza to jednoznacznie, że pochodna niecałkowitego rzędu $D^{(1)}(t)$ jest odpowiednikiem pochodnej pierwszego rzędu $f^{(1)}(t)$. Niezależność liczby iteracji *p* od rzędu η powoduje, że może istnieć pochodno-całka rzędu $\eta = 1$ o liczbie iteracji $p = 1$ (jak klasyczna pochodna Leibniza), jak również pochodno-całka o innej liczbie iteracji $p > 1$. Jednocześnie mogą też istnieć pochodno-całki o stałej liczbie iteracji *p* i dowolnej różnej od siebie wartości rzędu η. Ta niedokładność w zapisie sprawia, że nie można jednoznacznie fizycznie interpretować pochodno-całki Grünwalda-Letnikova.

1. Niejednoznaczność zapisu dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova

Rozpatrzmy pochodną *n*--tego rzędu zdefiniowaną bezpośrednio:

$$f^{(n)}(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{f^{(n-1)}(t+dt) - f^{(n-1)}(t)}{dt^n} \tag{4}$$

oraz jej odpowiednik dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova zapisany wzorem (3).

Dla $\eta = 1, 2, 3, \ldots$ dodatnia pochodno-całka (3) przyjmuje wartości pochodnej (4). W przypadku, gdy $\eta > 1$, to rząd $(\eta - 1)$ przyjmuje wartości dodatnie. Brak jednak ograniczeń w wartości η może prowadzić do niejednoznaczności zapisu, gdyż zakładając, że *p* może mieć dowolną wartość, to dla $p = 1$ i $\eta = 2$, wzór (3) przyjmuje formę różną od rzeczywistej wartości pochodnej całkowitego rzędu:

$$\begin{aligned} D^{(2)}(t) &= \left.\frac{d^\eta}{dt^\eta} f(t)\right|_{\eta=2} \\ &= \lim_{dt\to 0} \frac{\sum_{m=0}^{1} \frac{\Gamma(3)}{m!\Gamma(3-m)} f(t+(1-m)dt)}{dt^2} \\ &= \lim_{dt\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-dt)}{dt^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Wynik obliczeń z wzoru (5) choć poprawny, to w swym zapisie może rodzić nieporozumienia, gdyż lewa strona sugeruje, że mamy do czynienia ze specjalnym przypadkiem pochodno-całki, która jest co do znaczenia drugą pochodną, a rzeczywiści jest to dodatnia pochodno-całka rzędu $\eta = 2$, którą nie można interpretować jak pochodną całkowitego rzędu $n = 2$:

$$f^{(2)}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-dt) + f(t-2dt)}{dt^2} \quad (6)$$

Prawidłowa wartość iteracji we wzorze (5) powinna więc wynosić 2. Zapis rzędu po lewej stronie pochodno-całki Grünwalda-Letnikova (5) nie ma więc związku z zapisem pochodnej w zapisie Leibniza (6), a tym samym może to rodzić nieporozumienia związane z jej fizyczną interpretacją w nawiązaniu do znanych interpretacji „klasycznych" pochodnych wyższych rzędów, np.: w wyznaczaniu prędkości poruszającego się obiektu jako pierwszej pochodnej drogi i przyspieszenia jako jej drugiej pochodnej.

W związku z tak niejednoznacznym zapisem proponuje się w zapisie pochodno-całki Grünwalda-Letnikova uwzględnienie krotności iteracji *p* jako wyznacznika sensu pochodno-całki i tak dla rzędu η w sensie pochodnej rzędu *p* ma ona zapis:

$$f^{(p,\eta)}(t) = \frac{d^{p,\eta}}{dt^{p,\eta}} f(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\sum_{m=0}^{p} \frac{\Gamma(\eta+1)}{m!\,\Gamma(\eta - m + 1)} f(t + (p-m)dt)}{dt^{\eta}} \quad (7)$$

Inny proponowany zapis pochodno-całki to:

$$ {}^{p}_{t_0}D^{\eta}_{dt} f(t) \quad (8)$$

gdzie: η - rząd pochodno-całki,

p – rząd pochodnej całkowitej (rząd odniesienia, który stanowi bazę do interpretacji),

t_0 - punkt wyznaczania pochodno-całki zmiennej niezależnej *t*,

dt – przyrost (interwał) zmiennej niezależnej,

f(t) – funkcja zmiennej niezależnej *t*.

Z formalnego punktu widzenia proponowany zapis pochodno-całki Grünwalda-Letnikova (7-8) nadaje przesłanki w postaci rzędu pochodnej *p* do jej fizycznej interpretacji w nawiązaniu do znanych interpretacji „klasycznych" pochodnych.

2. Interpretacja dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova w odniesieniu do twierdzenia Lagrange'a

Niech *(1, η)* będzie rzędem pochodno-całki w zakresie pierwszej pochodnej oraz η będzie parametrem zmiennej niezależnej zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi w równaniach (7) i (8). Dodatnia pochodno-całka Grünwalda-Letnikova w zakresie pierwszej pochodnej ma wtedy postać:

$$f^{(1,\eta)}(t) = \frac{d^{1,\eta}}{dt^{1,\eta}} f(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t+dt) - \eta f(t)}{dt^{\eta}} \quad (9)$$

Niech:

$$dt^{\eta} \in (0, dt\rangle \quad (10)$$

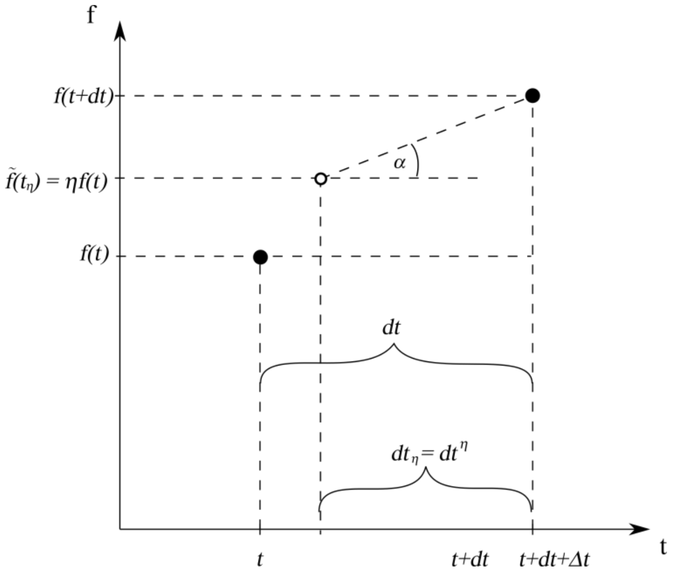
oraz

$$t_{\eta} = (t + dt) - dt^{\eta} \quad (11)$$

gdzie: t_η jest wartością, dla której $\eta f(t) = f(t_\eta)$

Funkcję f można interpretować, jako ciąg zmierzonych wartości otrzymanych w wyniku procesu próbkowania wielkości mierzonej, co czas próbkowania dt. Wartość $f(t_\eta) = \eta f(t)$ jest wtedy oszacowaną wartością wielkości mierzonej w punkcie t_η zmiennej niezależnej, która jest momentem czasu zawartym w przedziale czasu próbkowania dt .

Z rys. 1 wynika, że pochodno-całkę rzędu *(1, η)* opisuje tangens kąta α zawartego pomiędzy sieczną poprowadzoną między punktami $f(t_\eta)$ i $f(t+dt)$, a osią zmiennej niezależnej. W sensie notacji Leibniza, pochodno-całka rzędu *(1, η)* jest pierwszą pochodną funkcji f w punkcie t_η, gdzie przyrost wielkości niezależnej i wartość funkcji f są związane parametrem η, a wartość $f(t_\eta)$ jest estymowana iloczynem $\eta \cdot f(t)$. Ponieważ $f(t_\eta)$ nie jest wartością znaną z pomiarów, a estymowaną, to dla jasności zapisu oznacza się ją przez $\tilde{f}(t_\eta)$.



Rys. 1. Interpretacja pochodno-całki Grünwalda-Letnikova

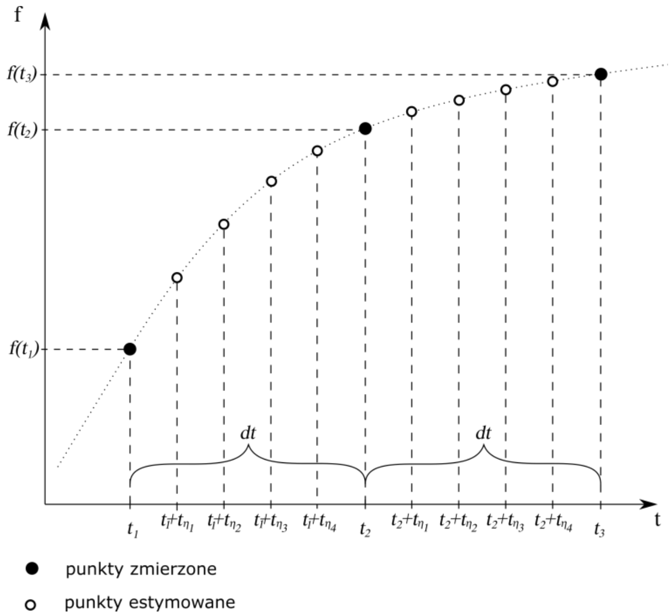
Z wzoru dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova w zakresie pierwszej pochodnej (9) wynika, że dla η spełniających zależność (11), wartość $\tilde{f}(t_\eta)$ estymuje wartość funkcji f dla zmiennej niezależnej t_η z przedziału $(t, t+dt)$. Wynikałoby z tego, że estymowane wartości $\tilde{f}(t_\eta)$ dla każdej wartości t_η z tego przedziału składają się więc na szacowane punkty charakterystyki funkcji f pomiędzy wartościami $f(t+dt)$ i $f(t)$.

Przykład

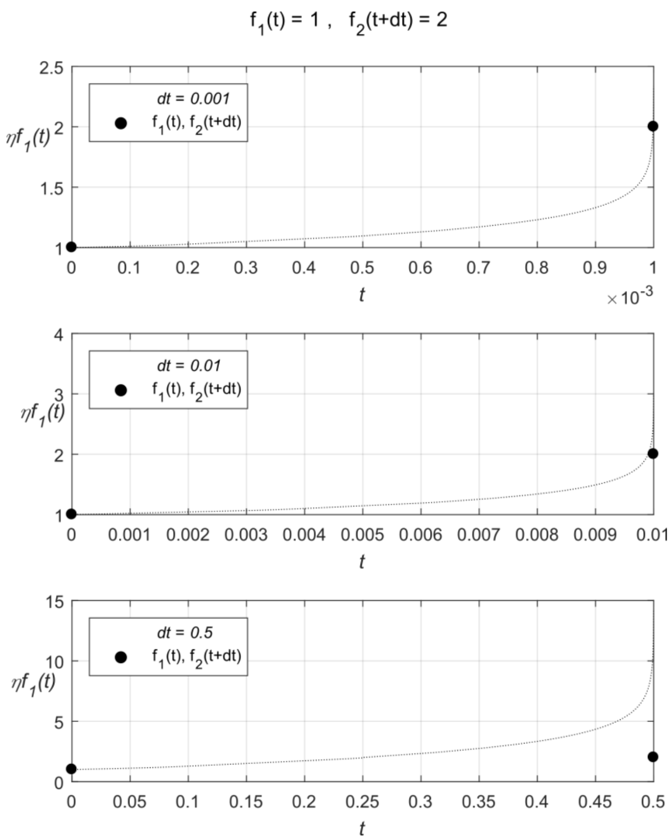
Prześledźmy pochodno-całkę Grünwalda-Letnikova dla wybranych $f(t)$, $f(t+dt)$ i różnych dt (rys. 2): $\{ f(t) = 1$; $f(t+dt) = 2$, $dt_1 = 0{,}5$; $dt_2 = 0{,}01$; $dt_3 = 0{,}001 \}$.

Z wzoru opisującego dodatnią pochodno-całkę Grünwalda-Letnikova (9) wynika, że zależność $f(t_\eta) = \eta f(t)$ jest swego rodzaju estymatorem nieznanych wartości funkcji f . Na rys. 3 pokazano wyznaczone ich wartości z zaznaczonymi danymi wcześniej wartościami. Z przebiegu charakterystyk na rys. 3 wynika, że im mniejszy przyrost funkcji dt, tym dokładność estymacji słabnie w miarę zbliżania się do punktu $f(t+dt)$.

Na rys. 4 i 5 pokazano charakterystyki pochodno-całki Grünwalda-Letnikova oraz różniczki wyznaczonej na wartościach skrajnych $f(t)$ i $f(t+dt)$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje taki punkt w przedziale $(t, t+dt)$, dla którego różniczka wyznaczona na krańcach badanego przedziału i pierwsza pochodna w tym punkcie są sobie równe. Przenosząc to twierdzenie na dodatnią pochodno-całkę Grünwalda-Letnikova to powinna być spełniona równość wartości różniczki i dodatniej pochodno-całce Grünwalda-Letnikova w punkcie t_η z przedziału $(t, t+dt)$. Na charakterystyce pochodno-całki w funkcji t, będzie to punkt oraz punkt $(t_\eta, \tilde{f}(t))$, w którym przecinają się prosta reprezentująca różniczkę $\frac{df(t)}{dt}$ i krzywa opisująca przebieg dodatniej pochodno-całki $f^{(1,\eta)}(t)$.

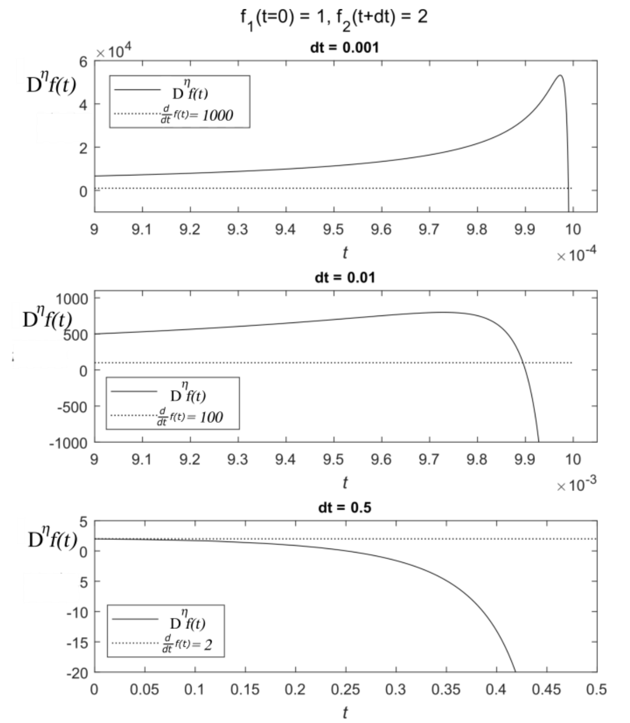


Rys. 2. Znane punkty funkcji $f(t)$ i punkty estymowane

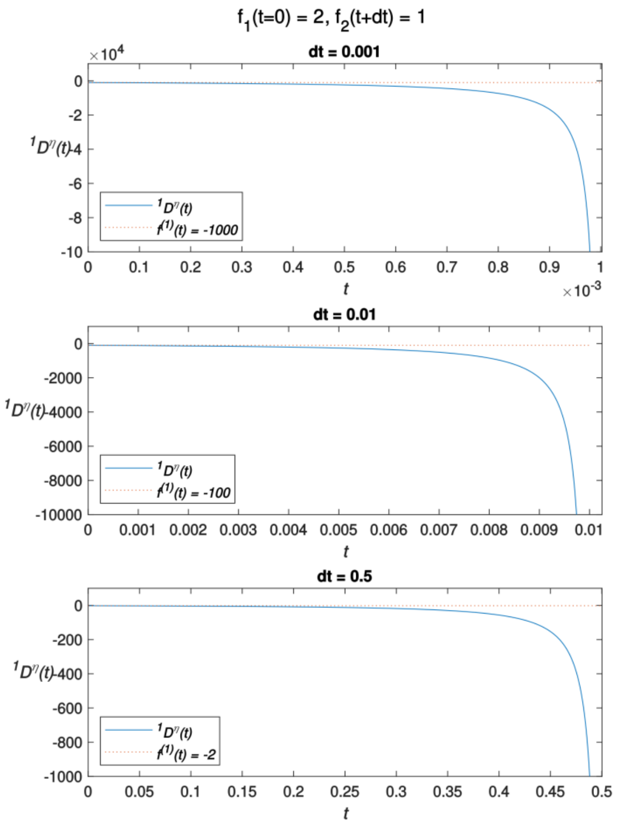


Rys. 3. Przebieg estymacji $f(t_\eta) = \eta f(t - dt)$

Z rys. 4 wynika, że w przypadku dodatniej pochodno-całki Grünwalda-Letnikova w zakresie pierwszej pochodnej, twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej nie jest spełnione we wszystkich prezentowanych przypadkach (dla $dt = 0{,}5$). Na rys. 5 pokazano przykład, gdzie dla danych $f(t) = 2$ i $f(t+dt) = 1$ twierdzenie to nie jest w żadnym przypadku przyrostu dt spełnione.



Rys. 4. Wartości pochodno-całki Grünwalda-Letnikova dla danych z przykładu i różnych wartościach dt



Rys. 5. Pochodno-całka Grünwalda-Letnikova nie spełniająca twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

Spełnienie twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wymaga spełnienia równości:

$$\frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{f(t+dt)-\eta f(t)}{dt^{\eta}} \tag{11}$$

Jego rozwiązaniem względem rzędu η jest zależność:

$$\eta=\frac{f(t+dt)}{f(t)}-\frac{W\left(-\frac{(f(t)-f(t+dt)dt^{\frac{f(t+dt)}{f(t)}-1}\log dt}{f(t)}\right)}{\log dt} \tag{12}$$

gdzie W jest funkcją Lamberta.

Podsumowanie

W rozdziale 1 artykułu zaprezentowano problem matematycznej i fizycznej interpretacji pochodno-całki Grünwalda-Letnikova wynikający z jej nieprecyzyjnego zapisu, w którym nie ma jasno określonego odniesienia do pochodnej w zapisie Leibniza. Ten brak rodzi problemy związane z interpretacją pochodno-całki, co pokazano na przykładzie obliczeniowym. W związku z nieprecyzyjnym zapisem zaproponowano nowy zapis pochodno-całki Grünwalda-Letnikova uwzględniający odniesienie do rzędu całkowitego pochodnej Leibniza, który byłby wyznacznikiem jej matematycznej i fizycznej interpretacji w przypadku niecałkowitych rzędów.

W rozdziale 2 pokazane zostało na przykładzie, że pochodno-całka Grünwalda-Letnikova nie we wszystkich przypadkach spełnia twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, tym samym trudna jest jej fizyczna i matematyczna ogólna interpretacja. Spełnienie tego twierdzenia względem dodatniej pochodno-całki wiąże się z rozwiązaniem równania z czterema zmiennymi (11), z których dwie (dt i η) są zależne od siebie, a jego rozwiązaniem względem zmiennej niecałkowitego rzędu jest zależność w funkcji Lamberta (12).

Bibliografia:

1. Apostol T. M.: Calculus Vol. 1, One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. John Wiley & Sons, Inc. 1967.
2. Cioć R.: Grünwald-Letnikov derivative – analyse in space of first order derivative. *Frontiers in Fractional Calculus, Book Series: Current Developments in Mathematical Sciences Vol. 1*, eISBN: 978-1-68108-599-9, ISBN: 978-1-68108-600-2, ISSN: 2589-2711 (Print), ISSN: 2589-272X (Online), Bentham Science Publishers Ltd 2018.
3. Cioć R.: Dodatnia pochodna Grünwalda-Letnikova jako pochodna funkcji drogi. *Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe*, 12/2017.
4. Das S.: Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008.
5. Gómez-Aguilar J.F. et al.: A Physical Interpretation of Fractional Calculus in Observables Terms: Analysis of the Fractional Time Constant and the Transitory Response. *Revista Mexicana de Física* 60, 32-38, 2014.
6. Miller K., Bertram R.: An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley & Sons 1993.
7. Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w praktyce. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
8. Podlubny I.: Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press, San Diego 1999.
9. Rutman R.S.: On Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation. *Theoretical and Mathematical Physics*, Vol. 105, No. 3, 1995.

Ambiguous notation of Grünwald-Letnikov differintegral

The paper discussed the problem of Grünwald-Letnikov differintegral notation in which non-integer order can be incorrectly interpreted as a higher or lower order derivative. Taking the problem into consideration the author's proposal is new notation of differintegrals.

Keywords: differintegrals, Grünwald-Letnikov.

Autor:

dr inż. **Radosław Cioć** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki, r.cioc@uthrad.pl